

ДИНАМИКА БАРАБАНЫХ МЕЛЬНИЦ В КОНТЕКСТЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ОБРАБАТЫВАЕМОЙ СРЕДЫ

Розглядається динаміка взаємодії монодисперсної завантажки і гумової футеровки; показана роль турбулентності в процесі дезінтеграції мінеральної сировини і абразивно-втомлюваного зносу гуми.

DYNAMICS OF TUMBLING MILLS IN A CONTEXT OF A WHIRL OF THE PROCESSED ENVIRONMENT

Dynamics of interaction monodispersoid batch and rubber lining is considered; the role of turbulence in the course of decomposition of mineral raw materials and abrasive-fatigue deterioration of rubber is displayed.

1 Общие сведения

Динамике взаимодействия внутримельничной завантажки и защитной футеровки посвящены многочисленные исследования; для мельниц типов МШЦ, МШР и ММС обзоры, представленные в работах [1-55], дают наглядное представление о сложности и актуальности рассматриваемой проблемы. Одной из важных задач, стоящих перед исследователями, является выяснение роли турбулентности в общем процессе движения завантажки в барабане мельницы и ее влияния на механизм разрушения футеровки. Существует, по крайней мере, две точки зрения на данную проблему. Первая принадлежит Д.М. Крюкову и многим его последователям (обзор в работах [1, 13-25]) и заключается в том, что движение завантажки подчиняется автоколебаниям, которые возбуждаются вследствие нелинейной зависимости силы трения в зоне контакта завантажка – футеровка от величины скорости скольжения; турбулентность при этом играет отрицательную роль в общем технологическом процессе, и для ее исключения необходимо не допускать увеличения вязкости пульпы сверх критического значения (см., например, С.В. Шмалий [68, 69]).

Вторая точка зрения принадлежит авторам работы [38], которые утверждают, что движение завантажки в виде монодисперсоида представляет собой явление детерминированного хаоса с некоторым упорядочиванием структуры; при этом основную роль как в технологическом процессе, так и в механизмах разрушения футеровки играет именно турбулентность. Следует подчеркнуть, что авторы не смешивают понятия хаоса и турбулентности, движение завантажки связывают с хаотическими автоколебаниями, а движение пульпы связывают и с автоколебаниями, и с флуктуациями. Вместе с тем существуют и другие точки зрения. Так, например, авторы работ [35-37] выдвинули гипотезы о возникновении турбулентности, не связанные с хаотическими автоколебаниями. В одной из таких гипотез, принадлежащих П.С. Ланда, утверждается, что в наблюдаемых турбулентных возмущениях принципиальную роль играют именно флуктуации (в автоколебаниях роль флуктуаций мала).

Целью настоящей работы авторы ставят решение частного вопроса в общей весьма сложной проблеме исследования турбулентности, а именно: на основании последних исследований в области взаимосвязи детерминированного хаоса и турбулентности выяснить роль турбулентности в технологическом процессе измельчения руд в барабанных мельницах. Авторы отдают себе отчет в том, что изложенные ниже модели и выводы носят предварительный характер и не обладают достаточной полнотой.

Прежде чем перейти к изложению основного материала, авторы сочли уместным сделать одно важное замечание, касающееся экспериментальных исследований. Рудоизмельчительные барабанные мельницы существующих типов, несмотря на кажущуюся простоту, с точки зрения эксперимента представляют собой весьма неудобную систему. Именно поэтому до сегодняшнего дня в научных работах отсутствуют эксперименты, в которых фиксировалась бы реальная картина движения завантажки в барабане. Модели-

рование этих процессов в лабораторных установках с прозрачной крышкой лишь в отдаленности напоминает реальный процесс, а компьютерное моделирование может служить исключительно приближенной моделью движения элементарных частиц во вращающемся барабане. Вот почему существующие модели, построенные на результатах таких экспериментальных исследований, не могут служить основанием для математических моделей, т.к. в них причины нередко принимаются за следствие, а следствие за причины.

Поэтому, по мнению авторов, наиболее существенную экспериментальную информацию можно получить при изучении механизмов разрушения резиновой футеровки, что и подтверждено ранее [38].

2 Исследование автоколебательных процессов в барабанных мельницах

Наиболее полно эта проблема освещена в работах Д.К. Крюкова и его последователей [17-31]. Основные положения модели Д.К. Крюкова можно свести к следующим кратким обобщениям:

1. В цилиндрических барабанных мельницах движение сегмента загрузки имеет установившийся характер; границы сегмента определяются коэффициентом сцепления загрузки с футеровкой и степенью заполнения барабана. При установившемся режиме имеет место динамическое равновесие загрузки, т.е. движение и распределение загрузки внутри барабана мельницы можно моделировать движением постоянного потока.

2. В барабанных мельницах при всех скоростях движения и коэффициентах заполнения наблюдается эффект скольжения технологической загрузки. Благодаря футеровке и центробежным силам загрузка поднимается на определенный угол подъема, а затем срывается со значительным скольжением. При этом характер движения сегмента загрузки носит колебательный характер. По Крюкову для лабораторной мельницы диаметром 500 мм с гладкой футеровкой без измельчаемого материала частота колебаний сегмента шаровой загрузки находится в диапазоне 2-3 Гц.

3. В барабанных мельницах с металлической футеровкой плиты футеровки изнашиваются по кривой, близкой к логарифмической спирали.

4. Механика движения сегмента загрузки в барабане мельницы, ее сложный гранулометрический состав, наличие твердой и жидкой фазы, особые условия взаимодействия загрузки и футеровки и ряд других факторов предопределили появление фрикционных колебаний центра масс сегмента подобно автоколебаниям груза в маятнике Фруда. Модель автоколебаний загрузки была исследована авторами при следующих допущениях, полученных, в том числе и при экспериментальных исследованиях мельниц:

- шаровая загрузка представляет собой физический маятник с точкой подвеса на оси барабана;
- величина скольжения сегмента загрузки, а, следовательно, и величина автоколебаний существенно зависят от профиля футеровки и коэффициента сцепления;
- вращающий момент при установившемся движении барабана мельницы является пульсирующим: по Крюкову для шаровых мельниц диаметром 2,7 и 3,2 м величина пульсаций колеблется в пределах 12-14 Гц;
- возбуждение автоколебаний связано с нелинейной зависимостью силы трения в зоне контакта загрузка-футеровка от величины скольжения, т.е. от скорости скольжения сегмента загрузки относительно футеровки.

Шмалый С.В. [32, 33] подтвердил наличие автоколебательного режима в шаровых мельницах с решеткой в замкнутом цикле измельчения. По его мнению, на автоколебательный режим существенное влияние оказывает вязкость пульпы, которая нелинейно зависит от концентрации твердой фазы в пульпе: при 70-80 % вязкость пульпы резко возрастает. В связи с этим авторы считают, что для исключения автоколебательного режима, как отрицательного явления для мельниц, необходимо не допускать увеличения

вязкости пульпы сверх критического значения, для чего следует управлять гидравлическим режимом за счет подачи в мельницу воды и руды.

3 Исследование турбулентного движения в предельно-насыщенных русловых потоках

В тридцатых годах прошлого века Великанов М.А. [34] разработал теорию образования песчаных волн, в том числе и для предельно-насыщенных русловых потоков, т.е. для грязекаменных (селевых) потоков, в которых содержание твердой фазы доходит до 50 % по объему. Безусловно, гидродинамическая модель Великанова имеет весьма отдаленное сходство с движением внутримельничной загрузки в барабанных мельницах, однако многие положения этой модели справедливы и для рассматриваемой проблемы. Модель основана на ряде постулатов и предпосылок, принятых в гидродинамике, суть их в следующем.

1. При шероховатом (наличие резких выступов и впадин) русле следует рассматривать лишь одно турбулентное движение потока. При этом в турбулентном движении имеются пульсации скоростей и давлений: поле скоростей и поле давлений пульсируют, т.е. их величины изменяются во времени, колеблясь около некоторого среднего значения.

2. Турбулентному потоку свойственны структурные образования, форма которых может иметь определенную закономерность, а размеры непрерывно меняются по законам случайностей; в русловых потоках структурные образования играют доминирующую роль.

3. Турбулентное движение потока состоит из ряда пульсаций: крупномасштабной пульсации, обычно отождествляемой с усредненной, и налагаемых на это движение пульсаций поля скоростей малых масштабов. Пульсация крупного масштаба играет доминирующую роль в процессах диффузии; пульсации малых масштабов – в процессах диссипации энергии. При этом большую роль играет вязкость потока, которая осуществляет передачу движения между слоями и формирует непрерывное скоростное поле потока; молекулярный механизм этой передачи движения поглощает часть механической энергии потока, превращая ее в тепловую энергию. В целом диссипация энергии является источником гидродинамического сопротивления и зависит от физико-механических характеристик потока; аэрация, т.е. насыщение потока воздушными пузырьками при его турбулентном движении, повышает диссипацию энергии. Согласно принципу минимума диссипации, введенному в гидродинамику Рэлеем и Гельмгольцем, из всех скоростных полей реализуется лишь те, при которых диссипация будет минимальной.

4. Под турбулентной диффузией понимается перенос вещества жидкостью, находящейся в состоянии турбулентного движения.

5. Движение твердых частиц по дну потока всегда происходит в форме движения волн; Великанов М.А. экспериментально установил, что форма песчаной волны практически не зависит от размера песчинок и от скорости потока.

6. На твердую частицу, движущуюся в потоке во взвешенном состоянии, всегда действует сила, направленная снизу вверх и противодействующая ее весу. В движущихся потоках на изгибе русла возникает поперечная циркуляция, причиной появления которой является центробежная сила; эта циркуляция определяет морфологический тип речного русла.

7. Между турбулентностью, как структурной формой руслового потока, и морфометрическими особенностями русла существует определенная связь. Образование волн на дне потока непосредственно связано с пульсацией скоростей, которые и определяют масштаб турбулентности. При этом именно крупномасштабные пульсации определяют геометрические размеры волн, образующихся на дне потока.

8. В турбулентном потоке распределение пульсирующих значений скоростей подчиняется вероятностным законам, например, законам нормального распределения Гаусса.

На основе этих важных предпосылок Великанов М.А. разработал теорию возникновения песчаных волн (1939 год), основанную на рассмотрении воздействия на песчинки пульсирующих скоростей потока. Автор использовал уравнение баланса твердого вещества, считая поток равномерным и установившимся (плоская задача). Им сделан также весьма важный вывод: «... плоское песчаное дно при равномерном поступательном движении потока в силу одной лишь турбулентности потока непременно превращается в волнообразное». Для резиновых футеровок, как показано ранее [38], этот вывод, безусловно, подтверждается.

4 Динамика движения внутримельничной загрузки в зоне контакта с резиновой футеровкой

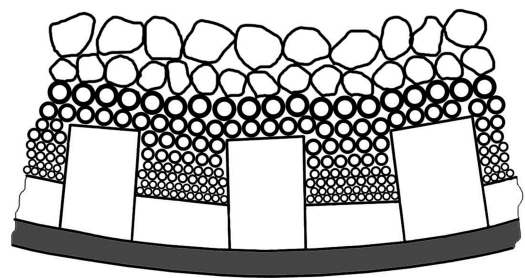
Механизм взаимодействия загрузки с футеровкой сопровождается целым рядом закономерностей и эффектов, которые могут проявляться как индивидуально, так и в некотором коллективно-функциональном взаимодействии. При этом, безусловно, действует принцип эмерджентности, когда совместные действия ряда эффектов приводят к возникновению новых закономерностей, к которым их раздельное действие привести не может.

Закономерность распределения внутримельничной загрузки по поперечному сечению барабана. Во вращающемся барабане стохастическое движение загрузки имеет сложный иерархический порядок распределения частиц по крупности. Многие исследователи [4-11] сходятся во мнении, что это распределение выглядит так, как показано на рис. 1. Крупные куски материала и металлические шары находятся преимущественно в верхней части сегмента загрузки (рис. 1, б); на границе раздела фаз загрузка-футеровка находится гидроподушка в виде пульпы с большим содержанием твердых частиц.

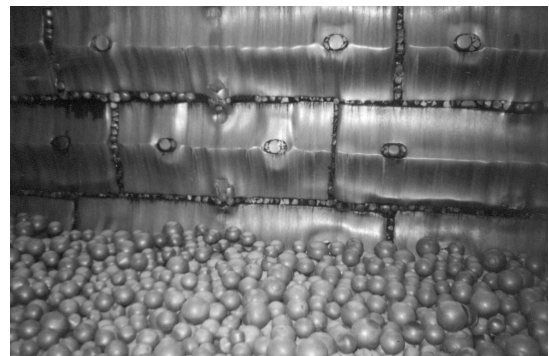
Следует подчеркнуть, что такая гидроподушка может быть рассмотрена как пограничный слой, или как некоторое «третье тело», состоящее из пульпы и твердых частиц различной крупности и различных материалов: перерабатываемого материала и частиц износа металлических шаров и резиновой футеровки. В связи со сложным рельефом футеровки движение пульпы является исключительно турбулентным, с наличием сложных структурных образований, имеющих вихреобразное и спиралевидное движение. В турбулентном движении пульпы всегда будут пульсирующие поля скоростей и давлений, а из всех структурных образований реально будут осуществляться лишь те, которые обладают минимальным потреблением энергии.

Согласно законам гидродинамики движение всех твердых частиц, находящихся в пульпе, будет направлено снизу вверх за счет вертикальной компоненты скорости. При этом скорость отдельных струй в структурных образованиях может быть намного больше, чем средняя скорость сегмента загрузки. Именно движение таких скоростных струй потока будет вызывать специфические разрушения резиновой футеровки: «подмыв плит» и эрозийно-кавитационный износ.

Гидроподушка как временное структурное образование (а вернее ансамбль рождающихся и гибнущих структурных образований) не является устойчивой ни по форме,



а – схема



б – в барабане мельницы МШЦ 5,5х6,6 с шарами диаметром 100 мм

Рис. 1 – Распределение внутримельничной загрузки по поперечному сечению барабана

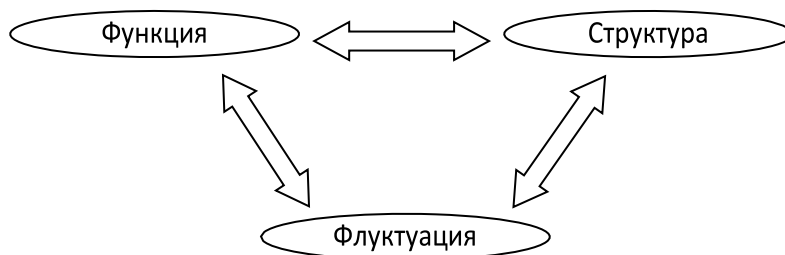
ни по геометрическим размерам; в пульпе всегда будут находиться изношенные металлические шары и крупные куски измельчаемого материала, поэтому сплошность гидроподушки будет определяться по закону случайностей. Такая неустойчивость будет зависеть как от турбулентного движения пульпы, так и от неустойчивого движения барабана за счет эффекта поворотной асимметрии (периодичность движения сегмента загрузки) и неравномерного (пульсирующего) вращения.

Явление детерминированного хаоса. Как уже отмечалось, движение внутримельничной загрузки в барабане мельницы обладает сложной иерархической структурой с турбулентным движением пульпы и вихреобразным пульсирующим движением загрузки; в целом процесс движения носит стохастический и нелинейный характер. Турбулентность как нерегулярное поведение нелинейной системы непосредственно связана с детерминированным многомерным хаосом и характеризуется сложным пространственно-временным поведением.

В механике [39-42] под детерминированным хаосом понимают нерегулярное или хаотическое движение, вызванное нелинейностью среды, для которой динамические законы движения однозначно определяют эволюцию во времени состояния системы. В барабане мельницы будет наблюдаться сдвиговая турбулентность пульпы, особенно на разделе фаз пульпа-футеровка; при этом детерминированный хаос может возникать в локальных областях сегмента загрузки.

Таким образом, движение внутримельничной загрузки можно рассматривать как движение открытой системы, имеющей большие отклонения параметров от равновесного состояния, нелинейность основных характеристик и кооперативное поведение подсистем, т.е. поведение постоянно возникающих в сегменте новых пространственно-временных структур. Такие структуры будут возникать в результате влияния ряда взаимосвязанных между собой факторов: турбулентного движения пульпы; скольжения загрузки относительно футеровки и возникновению благодаря этому фрикционных колебаний; большой диссипации энергии сегмента загрузки; поворотной асимметрии движения барабана в результате несимметричного распределения загрузки и несовершенства конструкции и.д. Форма структурных образований в объеме мельницы может иметь определенную закономерность в силу существования всеобщей формообразующей тенденции (более подробно рассматривается ниже), а их размеры будут изменяться по законам случайностей. Из всех вновь образованных структур более устойчивыми будут те, для которых будет соблюдаться принцип минимума диссипации. Следует подчеркнуть существенную роль диссипации в динамике внутримельничной загрузки: диссипация лежит в основе гидродинамических пульсаций загрузки и в основе механизма формообразования сегмента загрузки; часть диссипируемой энергии превращается в тепловую и нагревает загрузку, что уменьшает вязкость пульпы и тем самым изменяет коэффициент скольжения, и негативно сказывается на долговечности футеровки. Особенно следует отметить большую роль диссипации энергии во взаимодействии сегмента загрузки с резиновой футеровкой: взаимное приспособление потока и русла футеровки порождает определение гидроморфологических зависимостей, характеризующих как скоростное поле потока в локальных областях, так и морфометрические характеристики рельефа футеровки. Из всех возможных вариантов реализуются лишь те, при которых поток затрачивает наименьшее количество энергии, т.е. диссипация энергии системы должна быть минимальной.

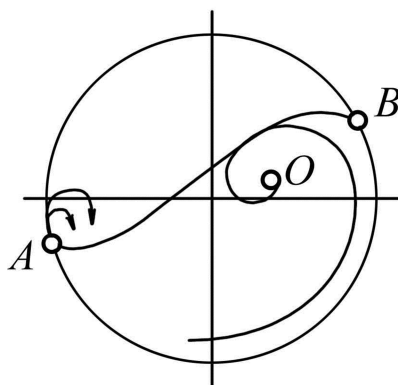
Согласно Пригожину И. [42] в таких неравновесных системах, обладающих нелинейностью и большой диссипацией, всегда существуют флуктуации, способные привести к образованию новых типов структур и функциональных связей; при этом эволюция структуры определяется последовательностью событий в соответствии со схемой.



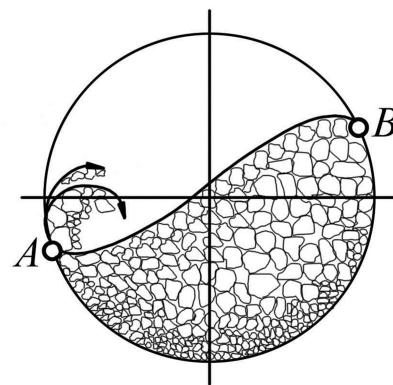
В процессе экспериментальных исследований на лабораторной мельнице (диаметр 500 мм с прозрачной торцевой стенкой) было установлено, что движение компактной зоны сегмента внутримельничной загрузки в общем случае осуществляется по логарифмической спирали с полюсом в зоне малоподвижного ядра (рис. 2, а). При этом, и это хорошо видно из экспериментальных наблюдений, само малоподвижное ядро не остается постоянным, а пульсирует с определенной частотой, т.е. периодически изменяется и его объем, и его форма, и его местоположение. По-видимому, в объеме мельницы, в основном по длине, такое ядро также не будет устойчивым, а вследствие мощных пульсаций загрузки будут изменяться его форма и геометрические размеры.

Если рассматривать движение загрузки по логарифмической спирали, то след ее наиболее четко проявляется на границе раздела фаз пульпа-футеровка. Этот факт может служить весьма важным аргументом в пользу утверждения

Д.К. Крюкова [17-19] и его последователей [19-25], что износ рабочей поверхности металлической футеровки происходит именно по логарифмической спирали. Для резиновой футеровки, как это показано ранее [38], износ по логарифмической спирали является частным случаем.



а – по логарифмической спирали с полюсом в центре O



б – с монодисперсоидом в зоне пята отката

Рис. 2 – Движение загрузки в барабане (AB – след компактной зоны)

Механика движения загрузки в зоне пята отката помимо описанных в работах [1-12] свойств имеет еще одну важную особенность, установленную экспериментально: на стыке загрузки и футеровки наблюдается мощное структурное образование, вызванное турбулентным движением пульпы (рис. 2, б). Согласно гидродинамике движения предельно-насыщенных потоков [34] позади движущегося тела или компактной системы твердых частиц всегда образуется пространство с пониженным давлением; разность давлений и определяет динамическое движение такой системы. К тому же сам турбулентный режим движения всегда сопровождается образованием вихрей позади тела.

Это структурное образование, назовем его **монодисперсоидом**, обладает неустойчивостью формы и размеров, ему присуща неустойчивость движения. В объеме монодисперсоида находится пульпа, металлические шары и измельчаемый материал различной крупности; все это вместе благодаря турбулентности находится в псевдосжиженном (кипящем) состоянии. Квазиустойчивость формы и размеров монодисперсоида в течение определенного времени определяется скоростью движения барабана, степенью его заполнения, величиной скольжения загрузки относительно футеровки (коэффициентом трения), вязкостью пульпы и рельефом футеровки. Это структурное образование является одним из основных факторов разрушения резиновой футеровки, т.к. именно в его объеме металлические шары или крупные куски измельчаемого материала

непосредственно соприкасаются с поверхностью футеровки; при этом сами шары имеют интенсивное хаотическое движение. Поэтому в зоне контакта наблюдается различные виды нагружения резиновой футеровки: удар, вдавливание и абразивно-усталостный износ. Такое утверждение не противоречит исследованиям Д. Крюкова [17-20] и П. Малярова [26-30].

Явление детерминированного хаоса вместе с другими эффектами (диссипация энергии системы, турбулентное движение пульпы, пульсационный характер движения барабана и др.) лежит в основе волнообразного движения внутримельничной загрузки (рассматривается ниже) и принципа локального разрушения элементов футеровки. В массивных резиновых элементах (плиты, лифтеры) с неоднородным полем напряжений накопления повреждений на поверхности и в объеме будет также неоднородным. Поэтому при прочих равных условиях (режим нагружения, внешняя среда и т.д.) место и время появления очагов разрушения носит вероятностный характер. В практике это выражается в виде неодинакового износа рядом расположенных плит или лифтеров, в различных морфометрических особенностях поверхности разрушения и различной долговечности до отказа.

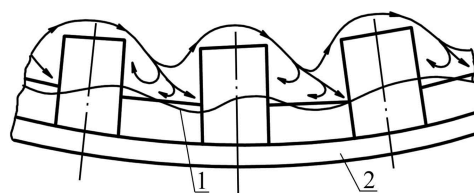
Закономерность волнового движения внутримельничной загрузки в барабане.

Такая закономерность была установлена в шестидесятых годах прошлого века. Многие исследователи отмечали, что поверхность гладкой резиновой футеровки со временем становится волнистой, а русло приобретает вид речного узора. Аналогичная закономерность наблюдалась и для металлических футеровок различной конструкции. Это дало повод для проектирования футеровочных плит с такой поверхностью, что при их укладке по диаметру мельницы наблюдалась волна определенных размеров. В ряде случаев как, например, при использовании футеровки плита-плита «Полимет» это давало положительные результаты [38].

В основе появления такой закономерности лежат уже отмеченные особенности движения загрузки в барабане мельницы: явления детерминированного хаоса, турбулентное движение пульпы, нелинейность механических параметров загрузки, мощные пульсации пульпы, существенная диссипация загрузки и т.д. Важную роль играет также эффект поворотной асимметрии движения барабана и пульсационный характер его вращения; в результате этих воздействий нарушается симметрия волн и задается определенный ритм речного узора.

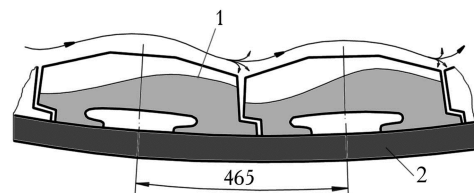
Согласно законам гидродинамики (см. выше модель Великанова) уже в силу одной турбулентности потока плоское русло футеровки превращается в волнообразное. Если рассматривать резиновую футеровку как гидродинамическую форму (рис. 3), то согласно теории Буссинеска для водослива с острым ребром максимум скоростей будет наблюдаться у самого ребра. В этом случае изотакхи (направляющие потока) будут идти от дна, и загигаться кверху; донная скорость уменьшается, а восходящее течение пульпы резко увеличивается. Максимальное значение донной скорости будет наблюдаться на валу переката, т.е. торце лифтера или плиты. Именно такое распределение скоростей и лежит в основе механизма абразивно-усталостного износа плит и лифтеров резиновой футеровки (см. рис. 3, рис. 4).

При этом морфометрический рельеф футеровки будет определяться, в том числе, и возникающей в потоке поперечной циркуляцией, вызванной центробежной силой. На этот важный факт, т.е. на то, что многие явления при движении потока



1 – кривая естественного износа; 2 – барабан

Рис. 3 – Направляющие потока в резиновой футеровке плита-лифтер конструкции «Полимет»



1 – кривая естественного износа; 2 – барабан

Рис. 4 – Направляющие потока в резиновой футеровке плита-плита конструкции «Полимет»

связаны с интенсивностью перемешивания за счет пульсации скоростей, а именно это и наблюдается в барабане мельницы, было указано в ранних классических работах Бусинеска.

Здесь следует отметить весьма важное обстоятельство: в резиновой футеровке плита-плита (рис. 4) в силу особенностей конструкции турбулентность потока, а, следовательно, и величины его скоростей, будут намного меньше, чем в футеровке плита-лифтер. Это является одной из причин более высокой долговечности этой футеровки. При сравнительных испытаниях [38] в идентичных условиях предприятия «Олкон» на мельницах МШЦ 3,6×4,0 при дезинтеграции железной руды футеровка плита-плита имела наработку до отказа $(13 \div 14) \cdot 10^3$ ч, а футеровка плита-лифтер $0,58 \cdot 10^3$ ч. Производительность мельниц и выход исходного продукта были идентичны.

Длительные промышленные испытания мельниц с резиновой футеровкой показали, что между структурной формой турбулентности потока и морфометрическими особенностями рельефа футеровки существует теснейшая связь. Поток и футеровка находятся в определенном взаимодействии и представляют собой некоторое единство двух взаимопротивоположных сторон одного и того же явления, т.е., механическая сущность процесса движения загрузки может быть сведена к взаимодействию потока и футеровки: поток управляет рельефом футеровки, а футеровка, в свою очередь, управляет потоком. Такое взаимодействие происходит в некотором пространственно-временном континууме: влияние рельефа футеровки непосредственно и очень быстро передается скоростному полю, геометрическим формам и размерам структурных образований потока. Обратное же влияние, т.е. влияние потока на формирование рельефа футеровки, осуществляется в течение сравнительно длительного периода времени, определяемого главным образом структурными особенностями потока и механическими характеристиками футеровки. К тому же, такое влияние не остается постоянным в течение длительного времени; благодаря износу в резиновой футеровке изменяется и рельеф и геометрические размеры, а, следовательно, будут изменяться и структурные особенности потока.

Таким образом, рельеф футеровки находится в определенной зависимости от структуры потока и является в известном смысле отпечатком структурных образований его турбулентности. Образующиеся при этом новые формы поверхности футеровки непосредственно связаны с пульсацией скоростей и с линейной корреляцией между мгновенными скоростями, определяющими масштаб этой турбулентности.

Такая взаимная приспособляемость потока и футеровки в реальных условиях происходит в течение некоторого времени, иногда несколько сот часов. Именно в это время наблюдается снижение производительности мельниц; после установления определенного равновесия между футеровкой и потоком мельница выходит на оптимальный режим работы.

В конечном итоге появляются такие гидроморфологические характеристики потока и такой морфометрический рельеф футеровки, при которых поток на преодоление всех сопротивлений затрачивает минимум энергии или минимум диссипации. Т.е. из всех возможных структурных образований потока реально осуществляются лишь те, для которых наблюдается минимальное рассеяние энергии. В установившемся движении мельницы наблюдается именно такое структурное образование потока, которое соответствует этому принципу (принцип Рэлея-Гельмгольца).

Отсюда вытекает непосредственная задача для конструкторов: необходимо выбрать такую геометрическую форму резиновой футеровки, которая появляется с течением времени в результате достижения некоторого гармонического равновесия между потоком и рельефом футеровки. Некоторые особенности такого выбора рассмотрены ранее [38].

Рассмотрим пример абразивно-усталостного износа резиновой футеровки «плита – плита», установленной на мельнице МШЦ 5,5×6,5. Профилограмма износа плит показана на рис. 5. После 1806 ч эксплуатации мельницы поверхность футеровки по диамет-

ру барабана приобрела волновую форму (рис. 5), а по руслу форма имела вид речного узора. Поверхность износа имела характерные морфометрические признаки: по длине волн износа наблюдалась асимметрия, т.е. расстояние между выступами волн изменялось по закону случайностей; аналогично изменялись и высоты гребней волн (на рис. 5 показаны в виде остаточной толщины футеровки).

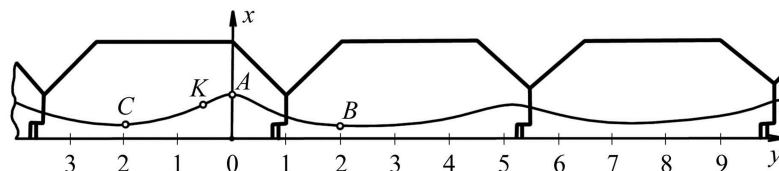


Рис. 5 – Профилограмма износа резиновой футеровки типа плита-плита на мельнице МШЦ 5,5х6,5 после 1806 ч эксплуатации

Вместе с тем геометрическая форма волн износа повторялась практически для всех плит футеровки. Такая квазисимметрия геометрических форм износа футеровки и асимметрия (около 10-15 % разброс) ее морфометрических показателей свидетельствуют о следующем: с одной стороны в барабане мельницы наблюдалось единство структурных образований загрузки и повторяемость их формы и размеров во времени; с другой стороны – турбулентность пульпы, неравномерность движения барабана и пульсации загрузки вносили элемент случайности, что и проявлялось в характере асимметрии волнообразного износа футеровки и в ритме речного узора ее поверхности. Геометрическая форма поверхности износа резиновых плит футеровки для рассматриваемой мельницы может быть описана логарифмической функцией. Рассмотрим конкретный пример. Показанная на рис. 5 профилограмма износа резиновой футеровки плита-плита (шаг укладки совпадал с шириной плит и равнялся 465 мм, максимальная толщина плит 160 мм) была получена при эксплуатации мельницы МШЦ 5,5х6,5 при дезинтеграции полиметаллических руд на СП «Эрдэнэт» с шарами диаметром 100 мм. Если разместить координаты так как это показано на рис. 5, то хорошо видно, что кривая САВ почти симметрична относительно оси у и имеет две точки перегиба С и В. Такая кривая на отдельных участках удовлетворительно описывается логарифмической функцией вида

$$y = b \exp[-(ax)^2]$$

Для конкретной резиновой футеровки (рис. 5) значения параметров следующие: $b = 10$, $a = 0,05$. Здесь имеется также частный случай: при $b = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $a = \sigma/\sqrt{2}$ получаем гауссову кривую – кривую нормального распределения. Это весьма важный экспериментальный результат, т.к. при дальнейших расчетах геометрических параметров резиновых плит и их долговечности с учетом вероятностного характера разрушения можно использовать именно нормальное распределение.

Кривая САВ более точно описывается также алгебраической кривой типа локон Аньези с уравнением $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$.

Следует отметить, что кривая износа на отрезке СК в частных случаях может быть удовлетворительно описана уравнением логарифмической спирали: в полярных координатах уравнение имеет вид

$$Q = a \exp(k\varphi).$$

5 Турбулентность и детерминированный хаос

Авторы будут оперировать такими терминами как хаос, странный аттрактор, фазовое пространство, бифуркация и турбулентность, которые в различных дисциплинах имеют разное толкование. Поэтому ниже приводятся наиболее принятые толкования этих терминов.

Хаос – обычно под хаосом всегда понималось неупорядоченное, случайное, не прогнозируемое поведение системы; в последнее время установлено, что в хаосе есть порядок и поэтому существуют универсальные сценарии возникновения хаоса; в системах с малым числом степеней свободы и при отсутствии случайностей появляется так

называемый детерминированный хаос. В фазовом пространстве детерминированный хаос отображается непрерывной траекторией, развивающейся во времени без самопересечения и постепенно заполняющей некоторую область фазового пространства.

Странный аттрактор – абстрактное понятие, введенное для описания хаотического состояния; область в фазовом пространстве, к которой стремятся все траектории и на которой они неустойчивы, странный аттрактор является образом хаоса в фазовом пространстве; следует подчеркнуть, что странный аттрактор – это всего лишь область, а не все пространство в целом, и внутри этой области по ограниченному спектру состояний блуждает с определенной вероятностью реальное состояние системы.

Фазовое пространство – обычное пространство координат и пространство скоростей; фазовое пространство непрерывно, поэтому начальные условия движения системы задаются иррациональными числами – бесконечной непериодической последовательностью цифр.

Бифуркация – математический образ, соответствующий перестройке характера движения реальной системы; математически бифуркация есть смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении ее параметров.

Турбулентность – такое состояние среды, при котором возбуждены движения (турбулентные пульсации) разных масштабов, причем имеет место перекачка энергии между ними; под масштабом обычно понимают порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения. Для нелинейных диссипативных систем с внешним источником возмущений энергия от движения крупных масштабов переходит к движению меньших масштабов; энергия меньших масштабов вследствие диссипации затухает и превращается в тепловую. Если движение системы имеет характер вихрей различного масштаба, то можно ввести характерный размер вихря ℓ , например, его диаметр, и соответствующую скорость U вихревого движения или волновое число вихря $K = 2\pi/\ell$. Для турбулентного движения основной характеристикой является спектральная функция (например, спектр Колмогорова – Обухова), т.е. распределение энергии по различным масштабам движения или скорости движения от масштаба. При движении больших масштабов скорости движения в этих масштабах зависят от диссипации энергии, геометрии среды и т.д.

На сегодняшний день существует достаточно большое количество сценариев возникновения турбулентности в жидкостях и газе. Рассмотрим наиболее распространенные из них. Начиная с работ Рейнольдса, считалось, что турбулентность в жидкостях можно рассматривать как автоколебательный процесс и она может быть полностью описана уравнением Навье – Стокса.

Основываясь на таком предположении, Л. Ландау предложил сценарий возникновения турбулентности, суть которого состояла в том, что в турбулентном течении возникает много различных независимых колебаний с несоизмеримыми частотами, при этом каждое из колебаний может быть простым, но их совокупность приводит к непредсказуемой сложности движения [35-37]. Позже этот сценарий был развит различными исследователями, например, Дж. Стюартом.

В семидесятых годах прошлого века в связи с открытием явления динамического хаоса турбулентность стали рассматривать как скачкообразное возникновение некоторых динамических переменных странного аттрактора в фазовом пространстве. При этом широко распространенным стало мнение, что турбулентность и есть динамический хаос. Позже было установлено, что динамический хаос представляет собой общее свойство динамических систем с размерностью больше двух, а турбулентность в гидродинамических системах является частным примером случайных волн, т.е. следует различать турбулентность и динамический хаос [35-37].

Тем не менее, именно при исследовании детерминированного хаоса были разработаны наиболее востребованные сценарии возникновения турбулентности:

- Д. Рюэль и Ф. Такенс возникновение турбулентности объясняли появлением странного аттрактора, возникающего после ряда бифуркаций.
- По М. Фейгенбауму сценарий перехода системы к хаосу происходит через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода; при этом он заметил, что значения параметров, соответствующие каждому удвоению, сходятся как геометрическая прогрессия, знаменатель этой прогрессии $\delta = 4,6692$ обычно называют постоянной Фейгенбаума.
- П.С. Ланда предложила сценарий, согласно которому возникновение турбулентности не связано с хаотическими автоколебаниями, а турбулентные возмущения вызваны флуктуациями (в автоколебаниях роль флуктуации мала).

Интересно приложение последних сценариев к рассматриваемой авторами проблеме. Как уже отмечалось, в шаровых мельницах на границе стыка монодисперсоида и резиновой футеровки образуется гидроподушка в виде смеси жидкости и твердых частиц измельчаемого материала. Скорость движения такой гидроподушки не остается постоянной и на разных участках существенно отличается. В гидродинамике слой жидкости, в котором средняя скорость существенно изменяется, называется пограничным слоем, или слоем смещения. Именно в этом слое образуются характерные для турбулентности вихри, которые имеют размеры порядка толщины слоя. Эти вихри обладают высокой степенью упорядоченности и поэтому нередко их называют «когерентными структурами». При спаривании вихрей и двойном уменьшении частоты их пульсаций возникает обратная связь через акустическую волну, рождающуюся на сильных вихревых неоднородностях в областях спаривания [37].

По мнению авторов работы [35] последние теории «развенчивают широко распространенный миф о возникновении турбулентности в струях за счет обратной связи через акустическую волну, т.е. миф о турбулентности как автоколебаниях. Заметим, что возникновение обратной связи через акустическую волну, индуцированную гидродинамической волной на неоднородности может стать весьма существенным и действительно привести к автоколебаниям, если на пути струи поставить экран, о который струя будет ударяться. При таком экране струи, называемые импактными [35, 36], генерируют мощные акустические волны. Механизм возбуждения в таких струях заключается в возникновении **глобальной неустойчивости**. В обычных струях обратной связи через акустическую волну недостаточно для возбуждения автоколебаний».

Таким образом, в барабанных мельницах на стыке загрузка – футеровка в пограничном слое характерные для турбулентности вихри могут спариваться, в результате чего возникает обратная связь через акустическую волну, которая появляется на сильных неоднородностях в областях спаривания. В этом случае возникают глобальные неустойчивости, приводящие к появлению автоколебаний. Появление таких особенностей характерно при использовании резиновой футеровки плита – лифтер. Если же турбулентность незначительна, то обратной связи через акустическую волну недостаточно для возбуждения автоколебаний, и тогда принципиальную роль играют флуктуации, которые и обуславливают турбулентные возмущения.

Такой сценарий характерен для мельниц с гладкой резиновой футеровкой на первом этапе их эксплуатации. Характерно, что в этот период турбулентные возмущения в пограничном слое незначительны и производительность мельницы по исходному продукту резко падает; по мере изменения морфометрических форм резиновой футеровки, т.е. при появлении волны износа плит и, следовательно, турбулентности, производительность увеличивается, что и подтверждается промышленными исследованиями [38].

Турбулентность в незамкнутых потоках (гидродинамические и акустические волны). Как отмечалось выше, в пограничном слое (в рассматриваемом случае в слое пульпы на границе загрузки и футеровки) образуются характерные для турбулентности вихри, имеющие размеры толщины слоя; в этом же слое существуют и взаимодействуют

гидродинамические и акустические волны. По мнению [36] этот факт дает возможность управлять уровнем турбулентности посредством акустического воздействия.

Рассмотрим безграничную среду, описываемую уравнениями Эйлера и уравнением непрерывности [35]. Полагаем, что среда движется в направлении оси x со скоростью U_0 . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + (U_0 + U) \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho_0 + \rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (U_0 + U) \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho_0 + \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (U_0 + U) \frac{\partial p}{\partial x} + (\rho_0 + \rho) \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y} + (\rho_0 + \rho) \frac{\partial V}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где p_0 и ρ_0 – давление и плотность в стационарном состоянии;
 U, V, p и ρ – отклонения компонент скорости, давления и плотности от стационарных значений соответственно.

Если переменные p и ρ связаны уравнением адиабаты, то справедливо соотношение

$$p = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} + 1 \right)^\gamma - 1 \right].\tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и ограничиваясь линейным приближением по отклонениям от стационарных состояний, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + U_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $a = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ – скорость звука в неподвижной среде.

Решение уравнения (3) будем искать в виде бегущих волн с частотой ω , распространяющихся вдоль оси x :

$$U = A \cos(\omega t - kx), \quad p = C \cos(\omega t - kx), \quad V = B \cos(\omega t - kx),\tag{4}$$

где k – волновое число;

A, B, C – неизвестные амплитуды.

Подставляя (4) в (3), получаем следующее уравнение

$$(\omega - kU_0) \left[(a^2 - U_0^2) k^2 + 2\omega U_0 k - \omega^2 \right] = 0.\tag{5}$$

Уравнение (5) описывает два типа волн: гидродинамическую волну и две акустических. Для гидродинамической волны, которая всегда распространяется в направлении движения потока

$$k = \omega / U_0.$$

Гидродинамическую волну обычно отождествляют с движением вихрей в пограничном слое: обычно считают, что скорость этой волны составляет примерно $0,5 \div 0,7$ от скорости потока.

Для встречных акустических волн

$$k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{a \pm U_0}. \quad (6)$$

Различие скоростей распространения двух противоположно направленных акустических волн связано с эффектом Доплера. Из (6) следует, что скорость волны, распространяющейся в направлении движения потока, может быть значительно выше, чем скорость волны, распространяющейся в противоположном направлении [36]. Следует также учитывать, что гидродинамическая волна, в отличие от акустических волн, является поперечной: для нее амплитуды продольной составляющей скорости и плотности (A и C) равны нулю, а для акустических волн амплитуды поперечной составляющей скорости равны нулю.

Из существующих теорий турбулентного движения трудно сделать вывод, имеющий практическое значение для конкретного рассматриваемого случая применения резиновых футеровок в барабанных мельницах. Однако можно обозначить направление исследований для управления турбулентностью за счет использования обратной связи через акустическую волну. Для этого на пути движения потока следует установить специальный экран. В этом случае поток, ударяясь об экран, будет генерировать мощные акустические волны, возбуждающие стохастические автоколебания; механизм возбуждения таких автоколебаний будет заключаться в возникновении глобальной неустойчивости. При этом индуцированная акустическая волна и спаривание вихрей, будучи по своей природе нелинейными, могут вызывать турбулентное движение потока. Помимо этого, за счет обратной связи через акустическую волну процесс турбулентности можно усиливать или уменьшать.

Этот весьма важный теоретический вывод для динамики барабанных мельниц может иметь далеко идущие последствия. Экраном на пути движения потока могут служить резиновые элементы футеровки со сложной морфометрической поверхностью, например, лифтеры или плиты трапецевидной или другой какой-либо формы. Если при этом различия по высоте впадин и выступов на пути потока (т.е. изрезанность рельефа поверхности футеровки), а также расстояние между ними будут согласованы со структурой и скоростью движения монодисперсоида загрузки, то в барабане мельницы установится глобальное равновесие (внутри потока равновесие возможно лишь случайно и на короткое время), что и будет соответствовать режиму измельчения материала с минимальным потреблением энергии.

Если же такой согласованности не будет наблюдаться, то механизм самоорганизации монодисперсоида загрузки, подчиняясь в целом второму началу термодинамики (т.е. из всех движений реализуются лишь те, которые производят минимум энергии) приведет к такому характеру движения, при котором в потоке будет устанавливаться множество случайных стохастических, существующих непродолжительное время, состояний. Это, в свою очередь, приведет к повышенному абразивно-усталостному износу резины, а иногда и к катастрофическому ее разрушению.

В конечном итоге (иногда это может произойти непосредственно перед отказом футеровки) между загрузкой и поверхностью резины установится некоторое квазиустойчивое равновесие; визуально это выразится в том, что на рабочей поверхности резины будет наблюдаться речной узор, иногда неполная и не совсем четкая волна естественного износа. Т.е. при эксплуатации всех возможных форм футеровки движение загрузки будет стремиться к некоторому устойчивому состоянию, формируя при этом русло потока (в данном случае поверхности футеровки) таким образом, чтобы соблюдался принцип минимума потребления энергии. Поэтому задача конструкторов и технологов, как уже отмечалось выше, заключается именно в том, чтобы, используя аналитические расчеты и накопленный опыт, создать резиновые футеровки с такими морфометрическими и геометрическими параметрами, чтобы уже на первом этапе работы мельницы между загрузкой и футеровкой установилось устойчивое равновесное состояние, что и будет

способствовать при соблюдении оптимальности технологического процесса минимальному износу футеровки.

Выводы

1. Турбулентность является одним из основных факторов, ответственных за механизм измельчения материала в барабанных мельницах. Сложность и недостаточная изученность турбулентного движения в монодисперсоиде загрузки (в основном, в пульпе) не позволяет однозначно утверждать, что возникновение турбулентности связано не с хаотическими автоколебаниями, а исключительно с флуктуациями; по мнению авторов, в ряде случаев могут присутствовать оба сценария, что не противоречит исследованиям [35].

2. Роль турбулентности в процессе измельчения материала (а именно это и является основным в технологическом процессе дезинтеграции руд) является безусловно положительной, что опровергает выводы ряда авторов (например, Шмалия [33, 34]).

3. В механизме разрушения резиновой футеровки роль турбулентности изучена совершенно не достаточно. Можно лишь утверждать, что наблюдаемые при абразивно-усталостном износе эффекты разрушения элементов футеровки («подмыв» плит и лифтеров, кавитационное разрушение резины, образование «волны износа», асимметрия волны износа, неравномерность износа футеровки по длине барабана и т.д.) безусловно связаны с турбулентностью. Дальнейшее исследование этой весьма важной проблемы может привести к созданию таких элементов резиновых футеровок, в которых явление турбулентности будет использовано для интенсификации процесса измельчения руд, при этом роль турбулентности в механизме разрушения резины должна быть минимизирована за счет применения прежде всего специальных конструкций футеровок. Этому может способствовать оптимальный выбор резины, оптимальный выбор параметров элементов футеровок и способов их укладки в барабане мельницы, правильный подбор шаровой загрузки и частоты вращения барабана и т.д.; все это вместе позволит реализовать такое взаимодействие загрузки и футеровки, при котором будет наблюдаться минимум производства энтропии и минимум потребления энергии и, следовательно, минимум абразивно-усталостного износа резины.

4. Результаты длительных лабораторных и промышленных исследований механики деформирования и разрушения резин, динамики взаимодействия технологической загрузки и футеровки в барабанных мельницах, механизмов разрушения элементов футеровок (особенно в промышленных условиях), а также результаты исследований турбулентного движения на морфометрические формы резиновых элементов и их абразивно-усталостный износ позволили создать теорию расчета и выбора оптимальных параметров элементов защитных футеровок [39, 51]. Эта теория и разработанные практические рекомендации были положены в основу создания принципиально новых оригинальных конструкций резиновых футеровок: футеровки «плита – лифтер» и «плита – плита» (так называемая «непрерывная волна»); для более тяжелых условий эксплуатации элементы футеровок включают в себя металлические вставки – специальные шипы, присоединяемые к резиновой матрице в процессе вулканизации. Морфометрические и геометрические параметры резиновых элементов и их раскладка в барабане мельницы выполнены согласно разработанным методикам таким образом, что в процессе эксплуатации мельницы вплоть до отказа футеровки сохраняется волновой характер износа резиновых элементов (сохраняется «непрерывная волна»). При этом длина волны практически соответствует длине волны естественного износа резины, определяемой аналитически; в этом случае соблюдается принцип минимального потребления энергии, минимального абразивно-усталостного износа и максимальной долговечности футеровки. Применение этих резиновых (в том числе и композитных – резино-металлических) футеровок позволило [39, 51]:

- увеличить производительность как по готовому классу, так и по питанию на 5-10 %;

- снизить удельный расход шаров на 15-20 %, в основном за счет снижения контактных напряжений;
- эксплуатировать шаровые мельницы с шарами диаметром 100 мм;
- снизить объем шаров и обеспечить уменьшение потребления электроэнергии на 7-9 %.

На сегодняшний день такие резиновые футеровки выпускает серийно предприятие ООО «ВАЛСА-ГТВ» (г. Белая Церковь); футеровки являются наиболее перспективными и конкурентоспособными на рынке услуг для шаровых мельниц всех типов, включая мельницы первой стадии измельчения с шарами диаметром 100 мм и в перспективе с шарами диаметром 125 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэвис Э. Тонкое дробление в шаровых мельницах // Теория и практика дробления и тонкого измельчения. – М.: 1932. – С. 153-170.
2. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. – М.: Недра, 1980. – 415 с.
3. Справочник по обогащению руд. Подготовительные процессы / Под ред. О.С. Богданова, В.А. Олевского. – М.: Недра, 1982. – 366 с.
4. Повышение износостойкости горно-обогатительного оборудования / Под ред. Н.С. Пенкина. – М.: Недра, 1992. – 265 с.
5. Защитные футеровки и покрытия горно-обогатительного оборудования / А.А. Тарасенко, Е.Ф. Чижик, А.А. Взоров, В.А. Настоящий. – М.: Недра, 1985. – 204 с.
6. Олевский В.А. Размольное оборудование обогатительных фабрик. – М.: Госгортехиздат, 1963. – 447 с.
7. Потураев В.Н., Сокур Н.И. Мельницы самоизмельчения. – К.: Наук. думка, 1988. – 220 с.
8. Сокур Н.И., Потураев В.Н., Бабец Е.К. Дробление и измельчение руд. – Кривой Рог: ВЭЖА, 2000. – 290 с.
9. Першин В.Ф. Машины барабанного типа: основы теории, расчета и конструирования. – Воронеж: ВГУ, 1990. – 168 с.
10. Першин В.Ф. Расчет распределения сыпучего материала в гладком вращающемся барабане // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1988. – № 6. – С. 8-9.
11. Першин В.Ф. К расчету барабанных грануляторов // Разработка, исследование оборудования для получения гранулированных материалов. – М.: МИХМ, 1985. – С. 16-20.
12. Андреев С.Е. О внутреннем трении в шаровой мельнице // Горный журнал. – 1961. – № 2. – С. 62-68.
13. Настоящий В.А. Выбор параметров и разработка конструкции резиновых футеровок большеразмольных рудоразмольных мельниц: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.05.06. – Днепропетровск, 1986. – 18 с.
14. Кириченко В.И. Обоснование конструктивных параметров и режимов работы мельниц принудительного измельчения с вращающимся интенсификатором: Дис... д-ра техн. наук: 05.05.06. – Днепропетровск, 1999. – 337 с.
15. Маслаков А.Г. Разработка, внедрение и усовершенствование резиновых футеровок шаровых мельниц для рудообогатительных фабрик с целью повышения их износостойкости: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.05.06. – Ленинград, 1986.
16. Дун И.Ф., Цукерман В.А. Влияние профиля футеровки барабана на процесс измельчения и износа в шаровой мельнице // Обогащение руд. – 1974. – № 3. – С. 30-35.
17. Крюков Д.К. Футеровки шаровых мельниц. – М.: Машиностроение, 1965. – 175 с.
18. Крюков Д.К., Беляев Ю.В., Трубицын М.Н. Определение рационального профиля футеровочных плит с целью повышения технико-экономических показателей барабанных мельниц // Дробильно-размольное оборудование и технология дезинтеграции: Межвед. сб. науч. тр. «МЕХАНОБР». – Л.: 1989. – С. 70-77.
19. Крюков Д.К. Графо-аналитический метод выбора формы профиля футеровочных плит шаровых мельниц // Горный журнал. – 1969. – № 4. – С. 23-28.
20. Крюков Д.К., Кириченко В.И., Бешта А.С. О траектории движения частиц измельчаемого материала при разгрузке мельниц // Обогащение полезных ископаемых. – 1984. – № 34. – С. 36-39.
21. Крюков Д.К., Миرونюк А.Ф., Трубицын М.Н. К вопросу учета ударных явлений в барабанных мельницах // Известия ВУЗов. Горный Журнал. – 1989. – № 11. – С. 80-83.
22. Тарасенко Е.А., Трубицын М.Н. Воздействие внутренней загрузки как двухмассовой системы на рабочую поверхность барабанной мельницы // Обогащение руд. – 2000. – № 3. – С. 32-35.
23. Трубицын М.Н. Определение воздействия внутримельничной загрузки на барабан при водопадном режиме работы // Металлургическая и горная промышленность. – 1997. – № 1. – С. 46-48.
24. Трубицын М.Н. Методика определения воздействия внутримельничной загрузки на обечайку мельницы самоизмельчения // Тез. докл. Респ. конф. молодых ученых и специалистов. Днепропетровск: ИГТМ АН УССР, 1984. – С. 21.
25. Тарасенко А.А., Трубицын М.Н. Логарифмическая спираль направляющая поверхностей трения в барабанных мельницах // Науковий вісник НГАУ. – 1998. – № 3. – С. 75-80.
26. Трубицын М.Н., Симанович Г.А. Распределение внутренней загрузки барабанных мельниц как движение некоторого потока с горизонтальным (прямым) откатом // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – № 4(16). – С. 44-55.
27. Маляров П.В. Исследование режимов работы шаровых мельниц с целью разработки износостойких профи-

- лей футеровочных плит: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.05.06. – Ленинград, 1980.
28. Маляров П.В. Проектирование износостойких профилей футеровочных плит для шаровых мельниц // Известия ВУЗов. Горный Журнал. – 1978. – № 12. – С. 120-123.
 29. Маляров П.В., Данилов Л.И., Майстренко А.Г. Разработка и промышленные испытания футеровки шаровых мельниц // Горный журнал. – 1982. – № 9. – С. 50-52.
 30. Корниенко Я.П., Маляров П.В., Мослаков А.Г., Пенкин Н.Е. К вопросу рационального проектирования футеровочных броней шаровых мельниц // Обогащение руд. – 1984. – № 5. – С. 28-33.
 31. Маляров П.В. Результаты внедрения и перспективы совершенствования экспериментальной ячеистой футеровки для шаровых барабанных мельниц.
 32. Марюта А.Н. Фрикционные колебания в механических системах. – М.: Недра, 1993. – 168 с.
 33. Шмалый С.В. Автоколебательный режим работы шаровой мельницы с решеткой в замкнутом цикле измельчения // Обогащение руд. – 1987. – № 5. – С. 2-4.
 34. Шмалый С.В. Модель шаровой мельницы с решеткой // Дробильно-размольное оборудование и технология дезинтеграции // Сб. науч. трудов «МЕХАНОБР». – Л. – 1989. – С. 109-115.
 35. Великанов М.А. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1949. – 474 с.
 36. Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А. Заблуждения и реальность в некоторых задачах физики (теория и эксперимент) // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 3. – С. 255-277.
 37. Гиневский А.С., Власов Е.В., Каравосов Р.К. Акустическое управление турбулентными струями. – М.: Физматмет, 2001. – 175 с.
 38. Трубецков Д.И. Турбулентность и детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 1. – С. 77-83.
 39. Чирик Е.Ф., Маркелов А.Е., Дырда В.И. Защитные футеровки барабанных рудоизмельчительных мельниц. – Днепропетровск, 2002. – 204 с.
 40. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
 41. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
 42. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. – М.: Мир, 1979. – 265 с.
 43. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
 44. Дырда В.И., Маркелов А.Е. Резиновые детали технологических машин. – Днепропетровск, 2008. – 316 с.
 45. Маркелов А.Е. Исследование абразивно-усталостного износа резиновых футеровок барабанных рудоизмельчительных мельниц // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2007. – Вып. 69. – С. 219-240.
 46. Маркелов А.Е. Исследование механизмов деформирования и разрушения защитных футеровок барабанных мельниц при ударных нагрузках и вдавливании // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2008. – Вып. 79. – С. 158-172.
 47. Франчук В.П., Настоящий В.А., Маркелов А.Е., Чирик Е.Ф. Рабочие поверхности и футеровки барабанных и вибрационных мельниц. – Кременчуг-Комсомольск, 2008. – 382 с.
 48. Чирик Е.Ф., Маркелов А.Е. Пути снижения эксплуатационных затрат при измельчении руд // Національний гірничий університет. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 29(70)-30(71). – С. 50-56.
 49. Чирик Е.Ф., Маркелов А.Е., Алексеев В.Н. Концепция повышения производительности и снижения эксплуатационных затрат в барабанных мельницах // РАН. – Апатиты, 2007. Матер. Междунар. совещ.: Современные методы комплексной переработки руд и нетрадиционного минерального сырья. – Ч. 1. – С. 159-167.
 50. Чирик Е.Ф., Маркелов А.Е. Синергетика взаимодействия резиновой футеровки и внутримельничной загрузки в тяжелых рудоизмельчительных мельницах // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2007. – Вып. 70. – С. 89-107.
 51. Дырда В.И., Маркелов А.Е. Структурно-синергетическая модель разрушения и расчет долговечности резиновой футеровки барабанных мельниц // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2007. – Вып. 71. – С. 117-139.
 52. Исследование резиновой футеровки мельниц при ударных нагрузках / Дырда В.И., Маркелов А.Е., Решевская Е.С., Тархова В.М., Твердохлеб Т.Е., Гончаренко А.В. // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2008. – Вып. 75. – С. 114-121.